مجلة جامعة جازان للعلوم الإنسانية
Jazan University Journal of Human Sciences (JUJHS)

The Effectiveness of Pirie–Kieren Model of Mathematical Understanding in Developing Algebraic Thinking Skills Among First Grade Middle School Students

Saber Jamaan Alzahrani
Department of Curriculum and Instruction, College of Education, Albaha University, Kingdom of Saudi Arabia

فاعلية نموذج Pirie–Kieren للفهم الرياضي في تنمية مهارات التفكير الجبري لدى طلاب الصف الأول المتوسط

صابر جمعان الزهراني
قسم المناهج وطرق التدريس، كلية التربية، جامعة الباحة، المملكة العربية السعودية

DOI	RECEIVED الاستلام	Edit التعديل	ACCEPTED القبول
https://doi.org/10.37575/h/edu/22002	2024/10/24	2024/12/13	2024/12/29
NO. OF PAGES عدد الصفحات	YEAR سنة العدد	VOLUME رقم المجلد	ISSUE رقم العدد
27	2025	3	13

Abstract:

This study aimed to identify the effectiveness of using the Pirie–Kieren Model for mathematical understanding in improving Algebraic thinking
among First-Year middle school students. The study community consisted of first-year middle school students in Al-Baha City, Saudi Arabia. The study sample included (43) male students, and it relied on the quasi-experimental approach as a study methodology, and the researcher prepared a teacher's guide and an algebraic thinking skills test, the study used the test as a study tool. The study findings showed statistically significant differences at the significance level (0.05) between the average scores of the control and experimental groups in the post-test. The statistical differences were in favor of the (experimental group). It also showed statistically significant differences at the significance level (0.05) between the average scores of the experimental group in the pre-and post-tests of the algebraic thinking, favoring the post-test. The study recommended that need to train mathematics teachers to use Pirie–Kieren Model in mathematics teaching in order to develop the algebraic thinking skills of their students.

Keywords: Pirie–Kieren Model, Mathematical Understanding- Algebraic thinking, Algebraic thinking skills.

الملخص:

هدفت الدراسة إلى الكشف عن فاعلية استخدام نموذج بيري وكيرين للفهم الرياضي في تنمية التفكير الجبري لدى طلاب الصف الأول متوسط، وتكوَّن مجتمع الدراسة من طلاب الصف الأول متوسط بمدينة الباحة، بالمملكة العربية السعودية، واشتملت العينة على (٤٣) طالبًا، واعتمدت الدراسة على المنهج شبه التجريبي. لتحقيق أهداف الدراسة أعدَّ الباحث دليلاً للمعلم، واختبارًا لمهارات التفكير الجبري اسْتُخدم كأداة للدراسة، توصلت نتائج الدراسة إلى وجود فروق ذات دلالة إحصائية عند مستوى الدلالة (٠.٠٥) بين متوسطيّ درجات المجموعتين الضابطة والتجريبية في القياس البعدي، وجاءت الفروق الإحصائية لصالح (المجموعة التجريبية)، كما تبيَّن وجود فروق ذات دلالة إحصائية عند مستوى الدلالة (٠.٠٥) بين متوسطيّ درجات المجموعة التجريبية في التطبيقين القبلي والبعدي لاختبار التفكير الجبري، وجاءت الفروق الإحصائية لصالح (القياس البعدي). أوصت الدراسة بضرورة تدريب معلمي الرياضيات على استخدام نموذج بيري وكيرين للفهم الرياضي؛ بهدف تنمية مهارات التفكير الجبري لدى طلابهم.

كلمات مفتاحيه: نموذج بيري وكيرين، الفهم الرياضي، التفكير الجبري، مهارات التفكير الجبري.

مقدمة الدراسة:

يُعدُّ تعليم الرياضيات من المجالات الحيوية التي تؤدي دورًا كبيرًا في تطوير القدرات العقلية والمعرفية لدى الطلاب؛ إذ تُمثل الرياضيات الأساس الذي يقوم عليه كثير من العلوم الأخرى، كما أن تدريس الرياضيات يستهدف إكساب الطلاب مهارات التفكير النقدي والتحليلي، مما يجعلها محور اهتمام عالمي، وقد أشار الخطيب (٢٠١٧) إلى أهمية تحسين أساليب التعليم في هذا المجال؛ حيث يعمل عددٌ من المؤسسات على تطوير عملية تعليم الرياضيات ورفع مستوى التحصيل لدى الطلاب.

وفي إطار السعي لتحسين جودة التعليم في مجال الرياضيات، وتطوير مهارات الطلاب بشكل فعَّال، أصبح من الضروري استخدام استراتيجيات تعليمية مبتكرة تعتمد على أسس علمية حديثة، ومن بين هذه النماذج، نموذج بيري وكيرين، الذي يهدف إلى تعزيز النمو في الفهم الرياضي لدى الطلاب عبر مجموعة من المستويات المتتالية التي تتيح لهم بناء فهم تدريجي للمفاهيم الرياضية، ويساعد النموذج الطلاب على الانتقال من المعرفة الأولية إلى مراحل أكثر تعقيدًا؛ تشمل فهم الصفات والخصائص الرياضية، وصولاً إلى مستوى الفهم الكامل (عبد الملاك، ٢٠١٩).

ووفقًا ما أشار إليه Putri & Susiswo (2020) فإن نموذج بيري وكيرين يُعزز النمو الديناميكي للفهم الرياضي عبر مستويات متعددة، ويتيح هذا النموذج للطلاب تحقيق تطور فكري متسلسل؛ حيث يعتمد نجاح كل مستوى على إتقان المستوى السابق، مما يؤدي إلى تحقيق مستوى مرتفع من الفهم الرياضي، كما أكدّ Güner & Uygun (2020) أن نموذج بيري وكيرين يُعدّ نموذجًا تعليميًّا ديناميكيًّا يتضمن مجموعة من المستويات المتداخلة؛ حيث يمكن للطالب التنقل بينها لتحقيق فَهمٍ متكامل، يُعرف هذا التنقل بعملية "الطي العكسي"، التي تمكّن الطالب من إعادة بناء فهمه من خلال تعزيز المعرفة المكتسبة وربطها بمفاهيم جديدة، وتساعد هذه العملية الطلاب على الوصول إلى مستويات متقدمة من الفهم الرياضي.

كما يُعد نموذج بيري وكيرين للفهم الرياضي من النماذج التعليمية المتميزة التي تهدف إلى تعزيز الفهم العميق للمفاهيم الرياضية لدى الطلاب، ويعتمد هذا النموذج على أساليب تعليمية مبتكرة تُركز على تنمية مهارات التفكير الرياضي العميق، مما يمكّن الطلاب من التعامل مع المفاهيم الرياضية بطريقة أكثر تجريدًا وتفصيلاً (بني سلامة والشناق، ٢٠٢٤).

ومن بين أهم المجالات التي يتناولها هذا النموذج هو التفكير الجبري، الذي يُعد جزءًا محوريًّا في منهج الرياضيات، فقد توصلت نتائج دراسة حجازي (٢٠٢٠) إلى أن نموذج بيري وكيرين للفهم الرياضي يُظهر فاعلية واضحة في تنمية التفكير الجبري لدى الطلاب؛ حيث يُتيح النموذج للمعلمين تقديم مجموعة متنوعة من الأنشطة والتطبيقات التعليمية التي تُشجع الطلاب على الوصول إلى مستويات متقدمة من التفكير الجبري، كما يعمل على رفع درجات الطلاب في اختبارات التفكير الجبري من خلال تعزيز قدرتهم على الربط المنطقي بين مجموعة من القوانين الجبرية المختلفة.

ويُعرَّف التفكير الجبري بأنه: القدرة على استخدام الرموز والمعادلات لحل المشكلات الرياضية بطريقة منظمة، حيث يتمكن الطلاب من استنتاج المجهول باستخدام استراتيجيات منطقية مدروسة (Awiria et al., 2021)، ويُعدُّ تنمية التفكير الجبري لدى الطلاب أحد أهم أهداف تعليم الرياضيات في جميع المراحل التعليمية؛ فهو أحد

أنواع التفكير الرياضي المرتبط بمحتوى الجبر، كنوع من التفكير الرياضي ضمن إطار جبري أو نشاط عقلي يقوم به كلٌّ من المعلم والطالب من خلال ممارسة أدوات للتفكير مثل التمثيل، والاستدلال، وحل المشكلات (بهوت وآخرون، ٢٠٢١).

وتتعدد مهارات التفكير الجبري حيث فتشمل: مهارات استخدام الرموز، وتمثيل العلاقات والدوال الجبرية، والتمثيل المتعدد، واكتشاف الأنماط والأشكال، وحل المعادلات الجبرية، وحل المشكلات الجبرية (الأحمدي، ٢٠١٩)، وتنمية هذه المهارات تُعدُّ ذات أهمية للمرحلة المتوسطة في الرياضيات، ومن خلالها يتمكن المتعلم من الفهم السليم للجبر ويصبح متمكنًا من الرياضيات؛ حيث إن مهارات التفكير الجبري يمكن اكتسابها من خلال مرور المتعلم بخبرات تعلم متعددة في الجبر (الزهيري، ٢٠٢٣).

ويعمل التفكير الجبري على استخدام الرموز والأدوات الرياضية لتحليل المعلومات وتمثيلها رياضيًّا من حيث الكلمات، والرسوم البيانية، والجداول، والمخططات، والمعادلات، ولتحليل ظروف مختلفة، مثل: تحديد موضع القيم المجهولة، واختبار البراهين، والبحث عن البراهين، وفيما يتعلق بالأفكار الرئيسة للجبر فيشتمل على: التعميم الحسابي، والجبر كلغة الرياضيات، والجبر كأداة لنمذجة الرياضيات (Sibgatullin et al., 2022).

وفي هذا السياق، يأتي البحث لتسليط الضوء على فاعلية استخدام نموذج بيري وكيرين للفهم الرياضي في تنمية التفكير الجبري لدى طلاب الصف الأول المتوسط بالمملكة العربية السعودية.

مشكلة الدراسة:

تُعدُّ مادة الرياضيات إحدى الركائز الأساسية في النظام التعليمي؛ إذ تؤدي دورًا محوريًّا في تنمية القدرات العقلية والمعرفية للطلاب، وعلى الرغم من ذلك، تُظهر العديد من الدراسات وجود تحديات كبيرة يواجهها الطلاب في المملكة العربية السعودية في استيعاب المفاهيم الرياضية؛ فقد أشار إسحاق (٢٠١٨) إلى أن جزءًا كبيرًا من معلمي الرياضيات في المرحلة المتوسطة لا يزالون يعتمدون على أساليب التدريس التقليدية، دون التحول إلى الاستراتيجيات الحديثة التي قد تُسهم في تبسيط عملية التعليم، مما ينعكس سلبًا على تحسين نتائج التعلم.

وأكد عديد من الدراسات الحديثة ضرورة الاهتمام بتطوير مهارات التفكير الجبري لدى الطلاب، وأشارت تلك الدراسات إلى أهمية تبني نماذج وإستراتيجيات تدريس مبتكرة؛ لتعزيز هذه المهارات؛ حيث بيَّنت دراسة العنزي (٢٠٢٠) ضرورة توظيف استراتيجيات تدريسية حديثة ومختلفة لتدريس الجبر؛ لأهميتها في التفكير الجبري، وتنمية مهارات حل المسائل الجبرية، ومنها ما أكدته دراسة فهيم وآخرون (٢٠٢٢) بأن المهارات اللازمة للتفكير الجبري تعمل على استثارة الطلاب للتعامل مع مادة الجبر لوضوح أهميتها، ويُسر التعامل معها من خلال التركيز على مهارات التفكير الجبري.

وتتجلى هذه التحديات بشكل خاص في ضعف القدرة على التعامل مع المعادلات الجبرية، وفهم العلاقات الرياضية، حيث أظهرت دراسة الأحمدي (٢٠١٩) أن مستوى طلاب المرحلة المتوسطة في مهارات التفكير الجبري بالمملكة يعاني من تدنٍ ملحوظ، بالإضافة إلى ذلك، تفتقر الطالبات إلى المعرفة البنائية في الجبر، نتيجةً لضعف الاستيعاب المفاهيمي للمحتوى الجبري المجرد، مما يجعل من الصعب عليهن حل المسائل الجبرية بكفاءة.

في ظل هذه الصعوبات، يُلاحظ أن هناك ضعفًا عامًّا في مستوى الفهم الرياضي لدى الطلاب؛ حيث يواجهون

صعوبة في بناء العلاقات الرياضية، وتقديم خطوات منطقية لحل التمارين المعقدة، ما يؤدي إلى قصور في مهارات التفكير الجبري لديهم (الحربي والضلعان، ٢٠٢٣)، وبالنظر إلى أهمية تدريس الرياضيات بفروعها المختلفة، تبرز ضرورة تنمية مهارات التفكير الجبري باعتبارها واحدة من الكفايات الأساسية التي ينبغي تأسيسها لدى طلاب المرحلة المتوسطة في المملكة، ومن هنا، يمكن صياغة مشكلة الدراسة في السؤال الرئيس الآتي: **ما فاعلية استخدام نموذج بيري وكيرين للفهم الرياضي في تنمية مهارات التفكير الجبري لدى طلاب الصف الأول متوسط؟**

فرضيات الدراسة:

للإجابة عن سؤال الدراسة الرئيس، تم ترجمة هذا السؤال في صورة فرضين لاختبارهما إحصائيًّا، وهما:

١. اختبار الفرض الأول والذي نص على: "يوجد فرق ذو دلالة إحصائية عند مستوى دلالة (≤ ٠,٠٥) بين متوسطيّ درجات طلاب المجموعتين التجريبية والضابطة في التطبيق البعدي لاختبار التفكير الجبري (مهارات التفكير الجبري والدرجة الكلية)".
٢. اختبار الفرض الثاني والذي نص على: "يوجد فرق ذو دلالة إحصائية عند مستوى دلالة (≤ ٠,٠٥) بين متوسطيّ درجات طلاب المجموعة التجريبية في التطبيقين القبلي والبعدي لاختبار التفكير الجبري (مهارات التفكير الجبري والدرجة الكلية)".

أهداف الدراسة:

تهدف الدراسة إلى الآتي:

١. الكشف عن وجود فروق ذات دلالة إحصائية عند مستوى دلالة (≤ ٠,٠٥) بين متوسطيّ درجات طلاب المجموعتين التجريبية والضابطة في التطبيق البعدي لاختبار التفكير الجبري (مهارات التفكير الجبري والدرجة الكلية).
٢. الكشف عن وجود فروق ذات دلالة إحصائية عند مستوى دلالة (≤ ٠,٠٥) بين متوسطيّ درجات طلاب المجموعة التجريبية في التطبيقين القبلي والبعدي لاختبار التفكير الجبري (مهارات التفكير الجبري والدرجة الكلية).

أهمية الدراسة:

- **الأهمية النظرية:**

١. تأتي أهمية البحث من خلال تسليط الضوء على نموذج بيري وكيرين للفهم الرياضي، الذي يُعدُّ إطارًا علميًّا يُسهم في تعزيز الفهم الرياضي، ويُستخدم لتحسين التفكير الجبري لدى الطلاب، من خلال تقديم مستويات تدريجية للفهم تساعد الطلاب على تطوير قدراتهم في التعامل مع المفاهيم الجبرية.
٢. التطرق إلى موضوع التفكير الجبري والذي يمثل واحدة من المهارات الأساسية في علم الرياضيات، وتناوله في البحث الحالي يعزز من القدرات العقلية لدى الطلاب، من حيث التفكير التحليلي وحل المشكلات.
٣. تناول شريحة عمرية مهمة، وهي طلاب المرحلة المتوسطة، التي تحتاج إلى نماذج وإستراتيجيات تعليمية مناسبة؛ لتطوير المهارات الفكرية، وتحديدًا في مواد أساسية، مثل: الرياضيات.
٤. إثراء المكتبات العربية بموضوع مهم قلما تناولته الدراسات العربية. كما يمثل البحث إضافة جديدة إلى حقل البحوث التربوية؛ حيث يقدم نتائج مستندة إلى تجارب عملية في البيئات التعليمية السعودية، مما يعزز من فهم كيفية استخدام النماذج الحديثة في تطوير التعليم.

- **الأهمية التطبيقية:**

١. تعزيز الجانب العملي حول استخدام نموذج بيري وكيرين للفهم الرياضي في تنمية التفكير الجبري لدى طلاب الصف الأول المتوسط بالمملكة العربية السعودية.
٢. تُسهم الدراسة في تحسين أداء الطلاب في الرياضيات، من خلال تقديم نموذج تعليمي فعال يركز على الفهم الرياضي، وتنمية التفكير الجبري.
٣. تقديم توصيات عملية لصُناع القرار التعليمي؛ لتبني نماذج تعليمية مبتكرة في تحسين جودة التعليم في المملكة العربية السعودية.

حدود الدراسة:

- **الحدود الموضوعية:** يقتصر البحث على وحدة الجبر والمعادلات الخطية والدوال بكتاب الصف الأول متوسط، الفصل الدراسي الأول، كما اقتصر على نموذج بيري وكيرين (المعرفة الأولية – عمل التصور – امتلاك التصور – ملاحظة الخاصية – الشكلية – الملاحظة / المشاهدة – التركيب – الاختراع) ويقتصر على مهارات التفكير الجبري (مهارة استخدام الرموز والعلاقات الجبرية– ومهارة التمثيل المتعدد– ومهارة حل المعادلات الجبرية– ومهارة حل المشكلات الجبرية).
- **الحدود الزمنية:** طبقت أدوات الدراسة في الفصل الدراسي الأول لعام ١٤٤٦هـ.
- **الحدود البشرية:** يتمثل مجتمع الدراسة في طلاب الصف الأول متوسط بمدينة الباحة.

التعاريف الإجرائية لمصطلحات الدراسة:

- **نموذج بيري وكيرين:**

عرف Steyn (2014, P. 20) نموذج بيري وكيرين بأنه: "نموذج يوضح الفكرة البنائية لفهم الفرد كعملية مستمرة للتنظيم، وإعادة تنظيم هياكل المعرفة".

ويُعرَّف إجرائيًا بأنه: نموذجي تعليمي يعتمد على تطبيق خطوات محددة؛ لتطوير الفهم العميق للمفاهيم الرياضية لدى طلاب الصف الأول المتوسط، ويشمل طبقات: (المعرفة الأولية – عمل التصور – امتلاك التصور – ملاحظة الخاصية – الشكلية – الملاحظة / المشاهدة – التركيب – الاختراع).

- **الفهم الرياضي:**

عرَّف Lestari et al. (2020, P. 2) الفهم الرياضي بأنه: "القدرة على فهم وتفسير ومعالجة الملاحظات والرموز الرياضية من خلال تجميعها في سلسلة من الاستدلالات لبناء الحجج المنطقية".

كما عرَّفه الجواهري والركابي (٢٠٢٣، ص. ٤) بأنه: "استيعاب وفهم مادة الرياضيات عن طريق ترجمتها إلى شكل آخر، أو تفسير الحقائق، أو تقدير النتائج، وهو مستوى أعلى من مستوى الحسابات التي يقصد بها مستوى المادة".

ويُعرَّف إجرائيًا بأنه: قدرة طلاب الصف الأول المتوسط على استيعاب المفاهيم الرياضية بشكل عميق وشامل، والتمكن من تطبيق هذه المفاهيم في سياقات متعددة، سواء كانت مجردة أو عملية، وفهم العلاقات الرياضية بين المتغيرات.

- **التفكير الجبري:**

عرَّف Chimoni et al. (2023, P. 2) التفكير الجبري بأنه: "عملية يقوم فيها الطلاب بتعميم الأفكار الرياضية من مجموعة من الحالات الخاصة، ويؤسسون تلك التعميمات من خلال نقاشات، ويعبرون عنها بطرق أكثر رسمية وملاءمة".

ويُعرَّف إجرائيًّا بأنه: مستوى قدرة طلاب الصف الأول المتوسط على تعميم الأفكار الرياضية من خلال التفاعل مع المعادلات الجبرية، ويشمل ذلك توظيف مهارة استخدام الرموز والعلاقات الجبرية، ومهارة التمثيل المتعدد، ومهارة حل المعادلات الجبرية، ومهارة حل المشكلات الجبرية؛ حيث يقوم الطلاب بتطبيق المهارات الجبرية في سياقات مختلفة خلال الأنشطة الصفية، مما يُمكّنهم من التعبير عن تلك التعميمات بطرق مختلفة، وملاءمة تتماشى مع المعايير الرياضية المتعارف عليها.

الإطار النظري والدراسات السابقة

المحور الأول: نموذج بيري وكيرين

مقدمة

شهدت طرق تدريس الرياضيات تحولاً ملحوظًا حيث أصبح اليوم التركيز موجهًا نحو تنمية الفهم العام للمنظومة الرياضية وحل المشكلات، مما أدى هذا التطور إلى ضرورة تحسين التعليم؛ لتحقيق مستوى عالٍ من القدرة الرياضية؛ مثل الاستدلال المنطقي، وتقليل العبء المعرفي؛ بناءً على ذلك ظهرت فكرة استخدام نموذج بيري وكيرين لتعزيز الفهم الرياضي لدى الطلاب من خلال تحسين مهارات الاستدلال المنطقي، وتقليل العبء المعرفي (الخطيب، ٢٠١٧).

وفي الحقيقة أسهم نموذج بيري وكيري بشكل كبير في تعزيز قدرة الطلاب على التبرير بجميع أشكاله وزيادة فهمهم، ويعود الفضل في ذلك إلى تعرُّف الطلاب إلى مستويات النموذج المختلفة، مما ساعدهم على اكتساب مهارات متنوعة في الفهم. وعندما تعرض الطلاب لأنشطة محفزة من قبل المعلم، تمكنوا من الوصول إلى مستويات أعلى من الفهم وتحسين مهارات التبرير الرياضي، كما يعتمد الطلاب على التغذية الراجعة والتنقل بين مستويات النموذج لزيادة فهمهم أثناء التعامل مع مشكلات رياضية غير مألوفة؛ حيث يقومون بحلها وتقديم تبريرات مناسبة لكل خطوة يتخذونها (بني سلامة والشناق، ٢٠٢٤).

مفهوم نموذج بيري وكيرين

عرف Patmaniar et al. (2021, P. 508) نموذج بيري وكيرين بأنه: "نظرة ثاقبة حول كيفية تنظيم المعرفة وإعادة تنظيمها، فضلاً عن الاستراتيجيات التي يستخدمها المتعلمون للتفكير في فهمهم والبناء عليه وفقًا لذلك، وهو بمثابة عملية ديناميكية نشطة تنطوي على التطور والعمل، خلال حركة مستمرة بين مستويات مختلفة من الفكر".

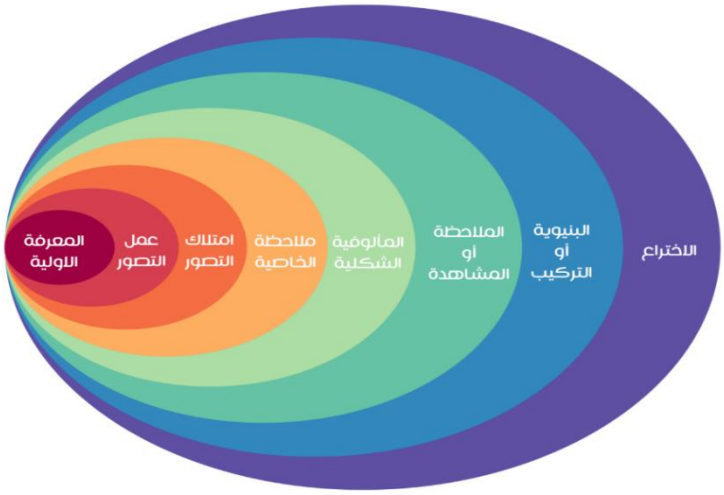
ويعرف George & Voutsina (2023, P. 3) نموذج بيري وكيرين على أنه: "نمو الفهم الرياضي من خلال نموذج يتضمن ثماني دوائر متداخلة، تمثل الدوائر المتداخلة ثماني طبقات عمل محتملة لوصف نمو الفهم لدى الفرد، في أي موضوع أو مفهوم محدد، على أي مستوى تعليمي."

وفي ضوء التعريفات السابقة نجد أن نموذج بيري وكيرين هو نموذج يُستخدم لتوضيح كيفية تطور التفكير الإدراكي والمعرفي لدى الأفراد، وخاصة في السياقات التعليمية والأكاديمية، ويُعدّ هذا النموذج واحدًا من الأدوات التي تشرح مراحل نمو التفكير النقدي والقدرة على التقييم، واتخاذ القرارات على أساس معرفي.

طبقات نموذج بيري وكيرين

نموذج بيري وكيرين يتكون من عدة طبقات مترابطة تهدف إلى تعزيز فهم الطلاب وتطوير قدراتهم على التفكير التحليلي والنقدي، ويمكن تقسيم كل طبقة إلى فقرة تشرح دورها وأهميتها في بناء المعرفة، وقد اتفقت دراسة خليفة (٢٠١٧) ودراسة Yao (2020) ودراسة عبد الملاك (٢٠١٩) ودراسة حجازي (٢٠٢٠) على أن طبقات نموذج

بيري وكيرين تتمثل في الآتي:



شكل (١)

طبقات / مراحل نموذج بيري وكيرين (إعداد الباحث)

- **المعرفة الأولية:** تُشكل المرحلة الأولى في نموذج بيري وكيرين؛ حيث يمتلك الطلاب خلفية بسيطة تُعدُّ ضرورية لبناء فهم أعمق للمفاهيم الرياضية، ويهدف المعلم في هذه المرحلة إلى توظيف تلك المعرفة لتعزيز تعلم الطلاب وتطوير مهاراتهم في الرياضيات (خليفه، ٢٠١٧)، نظرًا للقيود في نظريات تعلم الرياضيات، يجب على الباحثين تطوير أُطر مفاهيمية لفهم اكتساب الفهم الرياضي، ويرى نموذج بيري–كيرين أن فهم الطالب عملية ديناميكية غير خطية تتضمن ثمانية مستويات تبدأ بالمعرفة الأولية، التي تشمل جميع المعلومات التي يجلبها المتعلم، سواء كانت صحيحة أو غير كافية (Yao, 2020).
- **عمل التصور:** تمثل المرحلة الثانية في نموذج بيري وكيرين بداية تكوين الطلاب لصورة ذهنية واضحة حول المفاهيم الرياضية؛ حيث يسعى الطلاب لربط المعرفة الأولية بالمعلومات الجديدة باستخدام الرموز والأشكال والأمثلة (عبد الملاك، ٢٠١٩)، حيث يشير المستوى الثاني إلى تكوين الصورة أو عمل التصور، ويُتوقع من المتعلمين التمييز بين المعرفة السابقة واستخدامها في مواقف جديدة، مما يعزز بناء أفكار حول المفاهيم (Gokalp & Bulut, 2018)وعليه أوضح بني سلامة والشناق (٢٠٢٤) أن دور المعلم في هذا السياق يتمثل في استخدام إستراتيجيات لتقييم قدرة المتعلم على التمييز بين المفاهيم المختلفة خلال المرحلة التعليمية، ومن خلال ذلك، يمكن للمعلم معرفة مدى قدرة الطالب على فهم الفروق بين المفاهيم.
- **امتلاك التصور:** تعدُّ إحدى خطوات نموذج بيري وكيرين، حيث يُظهر الطلاب قدرة على دمج المفاهيم الرياضية وتطبيقها بفعالية، في هذه المرحلة، يفهم الطلاب المعاني العميقة للمفاهيم، مما يعزز قدرتهم على حل المشكلات وتفسير النتائج بشكل منطقي (حجازي، ٢٠٢٠)، نموذج بيري وكيرين (١٩٩٤) يصف الفهم الرياضي كعملية ديناميكية غير خطية ومتكررة؛ حيث يبني الطلاب معارفهم من خلال تجاربهم، لذا في هذا المستوى، يستطيع الطلاب

استخدام البناء العقلي للمفاهيم الرياضية دون الحاجة لأمثلة معينة، ويستبدلون الصور المرتبطة بالمفهوم بتمثيلات ذهنية متنوعة Peñaloza & Vásquez (2022)، كما يقوم المعلم بتقديم أمثلة ومواقف تُسهم في الكشف عن مدى بناء الطالب لأسس معرفية صحيحة حول المفهوم الذي تعلمه، مما يضمن أن الترابط بين مكونات البنية المفاهيمية قد تم بشكل سليم (بنى سلامة والشناق، ٢٠٢٤).

- **ملاحظة الخاصية:** في إطار نموذج بيري وكيري، تمثل "ملاحظة الخاصية" مرحلة متقدمة في التعلم، حيث يركز الطلاب على تحليل الخصائص المميزة للظواهر، مما يُعزز قدرتهم على التصنيف والتمييز بين المفاهيم بناءً على صفاتها الدقيقة (حجازي، ٢٠٢٠)، قدم بيري وكيري نظرية لنمو الفهم الرياضي تعكس الطبيعة غير الخطية والمتكررة للتعلم؛ حيث يعتمد الطلاب في مرحلة "ملاحظة الخصائص" على تحديد السمات الأساسية للمفاهيم والتمييز بينها (Irvine, 2023)، يتم ذلك من خلال ملاحظة الخصائص والسمات الموجودة في أمثلة وحالات متنوعة، مما يُسهم في توضيح الفروق الدقيقة للمفهوم المراد تعلمه، وتساعد هذه الملاحظات في تعزيز الفهم العميق لدى الطلاب وتوجيههم نحو بناء صورة مفاهيمية صحيحة؛ لذا تُعدُّ هذه العملية ضرورية لتطوير مهارات التفكير النقدي والتحليلي لديهم (بني سلامة والشناق، ٢٠٢٤).
- **الشكلية:** حيث يتم التركيز على قواعد وقوانين محددة، في مرحلة الشكلية، يبدأ الأفراد في تطوير القدرة على التفكير بشكل منطقي وتجريدي، ويصبحون قادرين على التعامل مع المشكلات والمواضيع بطريقة أكثر تنظيمًا وتعقيدًا (بني سلامة والشناق، ٢٠٢٤)، وتمثل الطبقات الخارجية في النموذج مستويات فهم أعمق. في مرحلة التأسيس أو الشكلية، يعمم المتعلم الخصائص التي أدركها بناءً على العروض السابقة دون إشارة محددة إلى إجراء مُفصل للصور (Güner & Uygun, 2020).
- **الملاحظة / المشاهدة:** في نموذج بيري وكيري للمعرفة، تُعدُّ الملاحظة خطوة أساسية في بناء الفهم العلمي، حيث تجمع البيانات الدقيقة حول الظواهر لاستخدامها في تحليل الفرضيات وتطوير النظريات (الخطيب، ٢٠١٧)، وبوصفها المستوى السادس من نموذج بيري وكيرين، فإن الملاحظة هي المستوى الذي يلاحظ فيه الطلاب المعنى الذي صاغوا ملاحظاتهم وينظمونها، فهم "يتأملون وينسقون مثل هذا النشاط الرسمي، ويعبرون عن مثل هذه التنسيقات كنظريات ومفاهيم (Gülkilika et al., 2015).

ومن زاوية أخرى أشار أبو عره (٢٠١٤) إلى أن الملاحظة تحدث عندما يتمكن الطالب من دمج جوانب الصور الذاتية لبناء صفات رياضية في سياق معين، وتتيح ملاحظة الصفات للمتعلمين القيام بأفعال رياضية ملائمة للموضوع الذي يدرسونه، هذا الجمع بين الملاحظة والفهم يعزز من تجربتهم التعليمية.

- **التركيب:** تشير هذه الطبقة إلى القدرة على ربط المعلومات وتفسيرها في سياقات متعددة، مما يعكس تفكيرًا نقديًّا وتحليليًّا متقدمًا لحل المشكلات المعقدة بشكل شامل (عبد الملاك، ٢٠١٩) تشمل تنظيم المتعلم الملاحظات الرسمية ويفكر فيها كنظرية في هذه المرحلة التي يطلق عليها مرحلة التركيب أو البناء (Nopa et al., 2019)، وفي مرحلة البناء، ينشئ

الطلاب نموذجًا من خلال الجمع بين ملاحظاتهم، وامتلاك القدرة على تفسير ملاحظاتهم الرسمية بطريقة منطقية، وإثبات نتائجهم باستخدام تعبيرات تشبه النظريات (Sengul & Yildiz, 2016)، في هذه المرحلة، يقوم المعلم بتكليف الطلاب بمهمات تكشف عن مدى قدرتهم على استخدام الحوار الرياضي المنطقي والتعبير بلغة رياضية دقيقة، وتهدف هذه المهمات إلى تعزيز الفهم العميق للمفاهيم الرياضية، وتمكين الطلاب من تطبيق مهاراتهم في سياقات متنوعة، من خلال هذه الأنشطة، يمكن للمتعلمين تطوير قدراتهم في التفكير الرياضي والتواصل الفعال (بني سلامة والشناق، ٢٠٢٤).

- **الاختراع:** في نموذج بيري وكيرين، تمثل طبقة "الاختراع" قدرة الفرد على التفكير الإبداعي لتطوير حلول جديدة، متجاوزًا الحلول التقليدية (بني سلامة والشناق، ٢٠٢٤)، ويُظهر الفرد في هذا المستوى فهمًا عميقًا ومنظمًا، مما يتيح له إعادة صياغة المفاهيم، وطرح أسئلة جديدة قد تؤدي إلى مفاهيم مبتكرة (Peñaloza & Vásquez, 2022).

خصائص نموذج بيري وكيرين

يتميز نموذج بيري وكيرين بتقديم أنشطة تطبيقية غير مباشرة، تركز على ربط القوانين والمفاهيم التي تعلمها الطلاب في موضوع التعلم، ومن خلال هذه الأنشطة، يتمكن الطلاب من الوصول إلى هيكل معرفي متكامل يسمح لهم بربط مجموعة من القوانين، وتفسير هذه الروابط بشكل منطقي، وتعزز هذه الخصائص من قدرة الطلاب على التفكير النقدي والتحليلي، مما يُسهل عليهم استيعاب المفاهيم الرياضية بشكل أعمق، كما يُعزز النموذج من التفاعل بين المعرفة السابقة والمعلومات الجديدة، مما يُسهم في بناء فهم شامل ومتسق للمادة (حجازي، ٢٠٢٠).

ومن جانب آخر أشار Yao (2020) إلى أن نموذج بيري وكيرين يؤكد أن المعرفة المتقدمة تتطلب تكاملاً بين "التصرف" و"التعبير"، وينمو الفهم من خلال التفاعل بين الأنشطة العقلية والجسدية، مع أهمية التعبير لفهم المعرفة المكتسبة، كما يُطلق على الأفعال التي تُسهم في تكوين صورة "الفعل التصويري"، في حين يُعرف تكامل التعبير "مراجعة الصورة"، التي تشمل مراجعة الأعمال السابقة، وتكييف المهام الجديدة، مما يتيح تغييرات بنَّاءة في السلوكيات.

ولذا أكد عبد الملاك (٢٠١٩) أن نموذج بيري وكيرين له خصائص متعددة ومن أهمها الاستفسار الذي يشجع المتعلمين على طرح الأسئلة والبحث عن المعرفة، كما يعزز تفسير التفكير فهم العمليات العقلية وزيادة الوعي الذاتي؛ بالإضافة إلى ذلك يشجع النموذج على تحمل المسؤولية؛ مما يعزز الاستقلالية والاعتماد على الذات في التعلم، ويحفز التبرير المتعلمين على تقديم تبريرات منطقية، مما يعزز التفكير الناقد.

يتميز نموذج بيري وكيرين بعدة خصائص تعزز من فعالية التعلم كما يراها الباحث، وهي:

- يعتمد النموذج على التعلم النشط، حيث يشجع الطلاب على المشاركة الفعّالة من خلال أنشطة تطبيقية غير مباشرة، مما يعزز من إدراكهم للمفاهيم.
- يركز النموذج على الربط بين المعرفة السابقة والمعلومات الجديدة، مما يساعد الطلاب على بناء هيكل معرفي متكامل.
- يُعزز النموذج من التفكير النقدي والتحليلي، حيث يُطلب من الطلاب تفسير الروابط بين المفاهيم بشكل منطقي.

- يوفر النموذج بيئة تعليمية تدعم الاستكشاف والتجريب، مما يُسهم في تعزيز مهارات الاستدلال وحل المشكلات.

المحور الثاني: مهارات التفكير الجبري

مفهوم التفكير الجبري:

التفكير الجبري يُعدُّ من أبرز المفاهيم التي تُستخدم بشكل واسع في تعليم الرياضيات والمفاهيم الرياضية، ويعكس هذا المفهوم تنوعًا كبيرًا في تطبيقاته وتعريفاته، ومن بين أبرز التعريفات المتعلقة به ما يأتي:

عرَّف محمود (٢٠٢٣، ص. ٢٨٣) التفكير الجبري بأنه: " قدرة الطالب على استخدام الرموز والعلاقات الجبرية والتمثيل المتعدد واكتشاف الأنماط والأشكال وحل المعادلات الجبرية وحل المشكلات".

كما عرَّف Töman & Gökburun (2022, P.8) التفكير الجبري بأنه: "تطوير مفهوم الجبر والتفكير المجرد، من أجل الإسهام في التخصصات الأخرى، وتعزيز أنماط التفكير".

ومن ثَمَّ يُعرف الباحث التفكير الجبري أنه القدرة على استخدام المبادئ الجبرية لفهم العلاقات الرياضية وتفسيرها وحل المشكلات بطرق منظمة ومرنة، يتجاوز التفكير الجبري مجرد التعامل مع المعادلات إلى فهم أعمق لكيفية تطبيق الرموز والقواعد الجبرية في سياقات متنوعة من خلال فهم الرموز، والعلاقات، وتحليل الأنماط، وحل المشكلات، والتمثيل المتعدد والتفكير الاستدلالي.

مهارات التفكير الجبري

التفكير الجبري له الكثير من المهارات التي تعمل على تنمية المهارات التي تساعد الطلاب على الفهم والاستيعاب في مادة الرياضيات. هذه المهارات ضرورية وتعدُّ من الركائز الأساسية في تعليم الرياضيات، وتُسهم بشكل كبير في تعزيز قدرة الطلاب على التعامل مع المفاهيم الرياضية بكفاءة، وتشمل هذه المهارات عدة جوانب أساسية ويجب السعي إلى إكسابها وتعليمها للطلاب في جميع المراحل ولا سيما المراحل الأساسية من التعليم، ومن أهم هذه المهارات التي اتفقت عليها دراسة الحربي وضلعان (٢٠٢٣) ودراسة Chan et al. (2022) ودراسة أبو عصر (٢٠٢٠) ما يلي:

- **تمثيل العلاقات في أشكال ورسوم:** وهي أحد مهارات التفكير الجبري والتي تتمثل في العلاقات الجبرية في أشكال، ورسوم، وتمثيل العلاقات على خط الأعداد، وتمثيل العلاقات في أشكال فنية، وفي رسم بياني، والربط بين اشكال التمثيلات المختلفة (أبو عصر،٢٠٢١)، التمثيلات المتعددة تشمل اللفظية، المخططات، الرسومية، والرياضية، وتساعد في حل المشكلات الكمية وتحسين الفهم الرياضي للطلاب، هذا بالإضافة الي ما أوضحه العتيبي (٢٠١٩) بأن التمثيل: مهارة أساسية في التفكير الجبري؛ حيث يمكن الطلاب من تحويل المشكلات الرياضية إلى صيغ واضحة تسهل تحليلها؛ باستخدام الرموز والرسوم البيانية والجداول، يستطيع الطلاب تصوير العلاقات بين المتغيرات بشكل أكثر فهمًا وتطبيقًا.
- **التعرف إلى الأنماط الرياضية:** تُعد مهارة اكتشاف الأنماط من أهم مهارات التفكير الجبري؛ حيث تساعد الطلاب على فهم العلاقات الرياضية والتنبؤ بالنتائج من خلال تحليل الأنماط المتكررة واستنتاج القواعد العامة (الحربي وضلعان، ٢٠٢٣)، وتُسهم هذه المهارة في تطوير التفكير التحليلي والاستدلالي، خاصةً في فهم المتسلسلات والدوال والعلاقات الجبرية المعقدة، مما يعزز قدرتهم على الربط بين الكميات

والعلاقات المتغيرة (Twohill, 2018).

وبناءً على ذلك يتبيَّن أن استكشاف الأنماط من المهارات الحيوية في التفكير الجبري؛ حيث يمكّن الطلاب من التعرف إلى التكرارات والخصائص المشتركة في البيانات أو الأعداد، ومن خلال تحليل الأنماط، يمكن للطلاب تطوير استراتيجيات لحل المشكلات المعقدة واستنتاج قواعد رياضية جديدة، مما يساعد الطلاب على بناء فهم أعمق للجبر (العتيبي، ٢٠١٩).

- **استخدام الرموز الجبرية في حل المعادلات:** يعد استخدام الرموز الجبرية في حل المعادلات أساسيًّا؛ لتبسيط التعبيرات، والتحقق من الحلول، مما يعزز أداء الطلاب في الرياضيات، ودورًا مهمًّا في التطور والاستقلالية (أبو عصر، ٢٠٢١)، لذا يجب على المعلمين استخدام طرق تعليم متنوعة، وتوفير بيئات ملائمة، وتوظيف معلمين مؤهلين لدعم فهم المفاهيم الرياضية (Kennedy & Ebuwa, 2022)، كما يُعد استخدام التمثيل والرموز الجبرية عنصرًا أساسيًّا في فهم الرياضيات، وتنمية مهارات التفكير الجبري لدى الطلاب، ومن خلال هذه الرموز، يمكن تحويل العبارات الرياضية المعقدة إلى صيغ أكثر بساطة، مما يُسهل تحليل المشكلات وفهم العلاقات بين المتغيرات، ويُسهم في حل المسائل بطريقة منهجية وفعالة (العتيبي، ٢٠١٩).
- **تطبيق الجبر في حل المشكلات:** حل المشكلات الجبرية يُعدُّ من أهم مهارات التفكير الرياضي، حيث يتطلب استخدام تمثيلات متعددة مثل المعادلات البيانية والجداول لاستكشاف العلاقات بين المتغيرات والوصول إلى الحل الأمثل (العتيبي والعراقي، ٢٠١٩)، وهذه المهارة تعزز الفهم العميق للمفاهيم الجبرية وتبسط الانتقال بين التمثيلات المختلفة، مما يُمكّن الطلاب من تطبيق مهاراتهم في سياقات متعددة، حيث يعدُّ حل المشكلات معيارًا مهمًّا لنجاح تعلم الرياضيات (Putri & Riskanita, 2022)، كما أكد القحطاني والصمادي (٢٠١٨) أن تطبيق مهارات الجبر يعزز من قدرة الطلاب على تطوير مهاراتهم وحل المشكلات، وتعد مهارات حل المشكلات من الأهداف الأساسية في تعليم الرياضيات؛ حيث تتضمن المناهج عديدًا من التحديات الرياضية التي يصعب معالجتها بأساليب تقليدية؛ لذلك تُعد تنمية هذه المهارات ضرورية؛ لتعزيز الفهم الرياضي لدى الطلاب، وتمكينهم من التعامل مع المواقف المعقدة بشكل أكثر فعالية.

وعليه، يرى الباحث أن مهارات التفكر الجبري يمكن إيجازها كما يأتي:

- تمثيل العلاقات في أشكال ورسوم: يعدُّ تمثيل العلاقات الرياضية من المهارات الأساسية التي تساعد الطلاب على فهم كيفية ارتباط القيم، والعوامل المختلفة، ويُمكن استخدام الرسوم البيانية، والجداول، والمخططات لتوضيح هذه العلاقات.

١. التعرف إلى الأنماط الرياضية: يساعد الطلاب على رؤية التكرارات والاتجاهات في البيانات، فعندما يتمكن الطالب من التعرف إلى الأنماط، يصبح من السهل عليه التنبؤ بالقيم التالية، أو فهم كيف تتغير العلاقة بين المتغيرات.

٢. استخدام الرموز الجبرية في حل المعادلات: من خلال استخدام الرموز، يمكن للطلاب كتابة

المعادلات بطريقة واضحة ومنظمة، مما يُسهل عليهم فهم الحلول.

٣. تُعد القدرة على تطبيق الجبر في حل المشكلات من المهارات الأكثر أهمية، ويتطلب ذلك من الطلاب استخدام معارفهم الرياضية لحل تحديات الحياة اليومية.

دور نموذج بيري وكيرين في تنمية الفهم الرياضي

نموذج بيري وكيرين يُسهم بشكل كبير في تنمية الفهم الرياضي لدى الطلاب؛ حيث أظهرت الدراسات أن المتعلمين بهذا النموذج يتفوقون على نظرائهم الذين يتبعون الطرق التقليدية، ويتميز هذا النموذج بتبسيط المفاهيم وتقليل العبء المعرفي، مما يعزز قدرة الطلاب على استيعاب المعلومات بعمق والتعامل بفعالية مع المشكلات الرياضية (الخطيب، ٢٠١٧).

وفقًا لبيري وكيرين (١٩٩٤)، يعدُّ الفهم الرياضي استمرارية ديناميكية غير خطية تمر بمراحل متعددة، مما يوفر رؤى حول كيفية بناء المعرفة وفهم الأخطاء المفاهيمية لدى الطلاب، وتساعد هذه النظرية في توجيه مطوري المناهج والمعلمين لتصميم تعليم يتسق ونمو الفهم الرياضي، كما تُستخدم في مجالات إعداد المعلم وتطوير نماذج التدريس، فضلًا عن ذلك أوضح بني سلامة والشناق (٢٠٢٣) أن نموذج بيري وكيرين يعد مهمًّا في تطوير الفهم الرياضي لدى الطلاب من خلال توفير إطار منهجي يُسهل الانتقال بين مراحل التعلم، ويشجع النموذج على الربط بين المعرفة السابقة والمعلومات الجديدة، مما يعزز تصور الطلاب للمفاهيم الرياضية، كما يُسهم في تحسين مهارات التبرير والتفكير النقدي، مما يعزز قدرة الطلاب على حل المشكلات الرياضية بفعالية.

ومن هذا المنطلق يوضّح الباحث أن نموذج بيري وكيرين يؤدي دورًا مهمًا في تنمية الفهم الرياضي من خلال توفير إطار متكامل؛ لتطوير التفكير الرياضي لدى الطلاب، ويقوم هذا النموذج على فكرة أن تعلم الرياضيات يجب أن يتطور تدريجيًّا، حيث يبدأ الطلاب بفهم الأساسيات البسيطة، ثم يتقدمون إلى مفاهيم أكثر تعقيدًا، ويتمثل ذلك في النقاط الآتية:

١. يركز نموذج بيري على مراحل تطور التفكير من الفهم البسيط إلى التحليل العميق، يبدأ الطلاب بالتفكير الثنائي أو المطلق ويطورون تدريجيًّا إلى التفكير النسبي والتعددية، مما يعزز قدرتهم على التعامل مع المفاهيم الرياضية بشكل أكثر تعقيدًا.

٢. نموذج كيرين يُكمل هذه العملية من خلال تعزيز مهارات التحليل والتقييم، ويوفر هذا النموذج استراتيجيات لتحليل المشكلات الرياضية، واستخدام أساليب مختلفة للتوصل إلى حلول، مما يساعد الطلاب على تطبيق مفاهيم الرياضيات في سياقات متعددة.

٣. من خلال تقديم المفاهيم بشكل تدريجي ومنظم، يساعد نموذج بيري وكيرين في تقليل العبء المعرفي على الطلاب، كما يسمح ذلك لهم بفهم المعلومات بشكل أفضل وتحسين قدرتهم على استيعاب وتطبيق المفاهيم الرياضية.

دور نموذج بيري وكيرين في تنمية مهارات التفكير الجبري

من هنا، يُظهر نموذج بيري وكيرين دورًا فعالاً في تعزيز الفهم الرياضي وتنمية مهارات التفكير الجبري لدى الطلاب؛ إذ يُسهم النموذج في تطوير القدرة على التفكير النقدي والتحليلي من خلال مراحل تدريجية كما أوضح حجازي (٢٠٢٠)؛ حيث إنه يساعد الطلاب على الانتقال

من الفهم البسيط إلى التفكير المعقد والمتعدد الأبعاد، كما أن هناك فروقًا واضحة بين الطلاب الذين يتعلمون باستخدام نموذج بيري وكيرين، حيث يكتسبون مهارات أكثر عمقًا وشمولية في الفهم الرياضي مقارنةً بالطلاب الذين يتلقون التعليم باستخدام الطرق التقليدية، مما يجعلهم أكثر قدرة على حل المشكلات الجبرية، والتعامل مع المفاهيم الرياضية بتفكير منطقي ومنظم، كما يدعم نموذج بيري وكيرين إمكانية تطوير مهارات التفكير الرياضي، مثل حل المشكلات، من خلال العودة إلى مستويات سابقة من الفهم. يساعد هذا النموذج المعلمين في اكتشاف سمات فهم الطلاب وتعزيز الفهم الرياضي باستخدام أفكار بديهية وتمثيلات ملموسة، وتوفر النظرية رؤى حول كيفية تنظيم وإعادة تنظيم المعرفة، مما يعزز مهارات التفكير الجبري لدى المتعلمين (Patmaniar et al., 2021)، وتعدُّ تنمية مهارات التفكير الجبري لدى الطلاب أمرًا ضروريًا؛ حيث تُسهم في التغلب على الصعوبات، وفهم محتوى الجبر بشكل فعال، كما تساعدهم في حل المشكلات الجبرية المتنوعة (٢٠٢٢)، ومن ناحية أخرى، أوضح بني سلامة والشناق (٢٠٢٣) أن نموذج بيري وكيرين يعزز من مهارات التبرير الرياضي ويُسهم في تحسين المرونة المعرفية لدى الطلاب.

وبالاستنتاج، نموذج بيري وكيرين يؤدي دورًا محوريًا في تنمية مهارات التفكير الجبري لدى الطلاب من خلال تقديم إطار منهجي لتطوير التفكير الرياضي، ويعزز النموذج من فهم الطلاب للعلاقات الجبرية والمعادلات من خلال مراحل تدريجية تتطور من التفكير البسيط إلى التفكير المعقد، كما يقدم نموذج بيري إطارًا لفهم كيفية تطور التفكير المعرفي، في حين يركز نموذج كيرين على تطوير مهارات التحليل والتقييم في سياق حل المشكلات، بفضل هذا النموذج، يمكن للطلاب اكتساب القدرة على استخدام الرموز الجبرية بفعالية، التعرف على الأنماط الرياضية، والتعامل مع المشكلات من زوايا متعددة، مما يساهم في تحسين فهمهم للجبر وتعزيز قدرتهم على حل المشكلات الرياضية بطرق أكثر ابتكارًا وفعالية.

الدراسات السابقة

يشتمل هذا الجزء على الدراسات العربية والأجنبية المتصلة بموضوع الدراسة التي تم الاطلاع عليها، وذلك بهدف الاستفادة منها في توضيح الحاجة إلى إجراء الدراسة الحالية وتحديد منهجها، هذا فضلًا عن معرفة أهم ما توصلت إليه من نتائج قد تفيد في بناء الدراسة الحالية، وتأصيل إطارها النظري، وأخيرًا إبراز موقع الدراسة الحالية بالنسبة للدراسات السابقة، وما يمكن أن تسهم به في تدريس الرياضيات في المرحلة المتوسطة.

أولًا– الدراسات العربية

هدفت دراسة بني سلامة (٢٠٢٣) بعنوان "أثر استخدام نموذج بيري وكيرين للفهم الرياضي في تحسين التبرير الرياضي لدى طلبة الصف السابع الأساسي في الأردن" إلى الكشف عن فروق دالة إحصائيًا بين متوسطات أداء طلاب المجموعة التجريبية والمجموعة الضابطة على اختبار التبرير الرياضي تعزى لنموذج بيري وكيرين، واشتملت عينة الدراسة على (٤٢) طالبًا من طلبة الصف السابع الأساسي، واستخدمت الدراسة المنهج شبه التجريبي، كما استعانت باختبار التبرير الرياضي كأداة للدراسة، وتوصلت نتائج الدراسة إلى وجود فروق دالة إحصائيًا بين متوسطات أداء طلاب المجموعة التجريبية والمجموعة الضابطة على اختبار التبرير الرياضي تعزى لنموذج بيري وكيرين لصالح المجموعة التجريبية.

هدفت دراسة حجازي (٢٠٢٠) بعنوان "فعالية استخدام

نموذج بيري وكيرين "Pirie and Kieren" للفهم الرياضي في تنمية التفكير الجبري لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية" إلى الكشف عن فروق دالة إحصائيًا بين متوسطي درجات تلاميذ المجموعة التجريبية وتلاميذ المجموعة الضابطة في التطبيق البعدي لاختبار التفكير الجبري، واشتملت عينة الدراسة على (٧٣) تلميذ من تلاميذ الصف الثاني الإعدادي، واستخدمت الدراسة المنهج شبة التجريبي، كما استعانت باختبار التفكير الجبري كأداة للدراسة، وتوصلت الدراسة إلى وجود فروق دالة إحصائيًا بين متوسطي درجات تلاميذ المجموعة التجريبية وتلاميذ المجموعة الضابطة في التطبيق البعدي لاختبار التفكير الجبري لصالح المجموعة التجريبية الذين درسوا باستخدام نموذج بيري وكيري للفهم الرياضي.

هدفت دراسة عبد الملاك (٢٠١٩) بعنوان: "تحليل دور الحديث الرياضي في نمو الفهم الرياضي لموضوع الكسور لدى تلاميذ الصف الرابع الابتدائي باستخدام نموذج بيري وكيرين" إلى التعرف على دور الحديث الرياضي في نمو الفهم الرياضي لدى التلاميذ باستخدام نموذج بيري وكيرين، واشتملت عينة الدراسة على (٦) من تلاميذ الصف الرابع الابتدائي، واستخدمت الدراسة منهج دراسة الحالة، كما استعانت باختبار المعرفة، ,المقابلات شبة مقننة، والملاحظة، والمسودات الميدانية، وأوراق عمل التلاميذ كأدوات للدراسة، وتوصلت الدراسة إلى أن الحديث الرياضي بين التلاميذ ساعدهم في الانتقال من مستوى المعرفة البدائية إلى مستوى إضفاء الطابع الرسمي وفقًا لمستويات الفهم الرياضي لبيري وكيرين، وأظهرت النتائج أربعة سلوكيات أساسية في الحديث الرياضي كما أوضحه التحليل باستخدام نموذج بيري وكيرين، وهي الاستفسار، وشرح وتفسير التفكير، والتبرير، وتحمل المسئولية.

هدفت دراسة الخطيب (٢٠١٧) بعنوان "أثر استخدام نموذج بيري وكيرين (Pirie and Kieren) للفهم الرياضي في الاستدلال المنطقي وخفض العبء المعرفي لدى طلاب الصف السابع الأساسي في الأردن" إلى الكشف عن فروق دالة إحصائيًا بين متوسطي درجات طلاب المجموعة التجريبية وطلاب المجموعة الضابطة في اختبار الاستدلال المنطقي والعبء المعرفي، واشتملت عينة الدراسة على (٣٣) طالبًا من طلاب الصف السابع الأساسي في الأردن، واستخدمت الدراسة المنهج شبه التجريبي، كما استعانت باختبار الاستدلال المنطقي، واختبار العبء المعرفي كأدوات للدراسة، وتوصلت نتائج الدراسة إلى وجود فروق دالة إحصائيًا بين متوسطي درجات طلاب المجموعة التجريبية وطلاب المجموعة الضابطة في اختبار الاستدلال المنطقي والعبء المعرفي لصالح المجموعة التجريبية الذين درسوا باستخدام نموذج بيري وكيري للفهم الرياضي.

ثانيًا: الدراسات الأجنبية

هدفت دراسة (Negara, et al, 2024) بعنوان "تقييم تعلم الرياضيات استنادًا إلى الإطار النظري لبيري-كيرين في المدارس الابتدائية" إلى وصف نمو فهم طلاب المدارس الابتدائية للهندسة من خلال استخدام أداة تقييم تعتمد على نموذج بيري وكيرين، وقد تكون مجتمع الدراسة من طلاب الصف الخامس في المدرسة الابتدائية الذين يدرسون موضوع الهندسة بإندونيسيا، واشتملت عينة الدراسة على الطلاب ذوي القدرة الرياضية المتوسطة، واستخدمت الدراسة منهج دراسة حالة النوعي، واستعانت الدراسة بالمقابلات واختبار قياس نمو فهم الهندسة استنادًا إلى نظرية بيري وكيرين، وقد توصلت الدراسة إلى أن الفهم الرياضي للطلاب ينمو ديناميكيًا وبشكل مستمر.

هدفت دراسة (Karimah, et al, 2024) بعنوان "طبقات فهم الطلاب بناءً على نظرية بيري وكيرين في

حل المشكلات القصصية من حيث النمط المعرفي" إلى بحث كيفية استناد عمليات فهم الطلاب الرياضي إلى نظرية الطي العكسي، وقد تكون مجتمع الدراسة من إحدى المدارس الإعدادية في الجزء الغربي من منطقة إندرامايو بكوريا، واشتملت عينة الدراسة على (٢٨) طالبًا، واستخدمت الدراسة المنهج الوصفي الاستكشافي والنوعي، واستعانت الدراسة باختبار الفهم الرياضي والمقابلات، وقد توصلت الدراسة إلى أن الطلاب أصحاب النمط المعرفي المستقل أكثر نشاطًا وفهمًا أفضل لعملية حل المشكلات مقارنةً بالطلاب ذوي النمط المعرفي المعتمد على المجال.

هدفت دراسة (Güner & Uygun, 2020) بعنوان "دراسة فهم الطلاب الرياضي للأنماط بواسطة نموذج بيري وكيرين" إلى الكشف عن وجود اختلافات للفهم الرياضي للطلاب حول الأنماط، وقد تكون مجتمع الدراسة من طلاب الصف السابع بمدرسة في تركيا، واشتملت عينة الدراسة على (٣) طلاب، واستخدمت الدراسة بمنهج دراسة الحالة، واستعانت الدراسة بالاختبارات والمقابلات، وقد توصلت إلى أن يوجد اختلافات للفهم الرياضي للطلاب بين المستويات الستة الأولى من المعرفة البدائية إلى الملاحظة.

هدفت دراسة (Syafiqoh et al., 2018) بعنوان "تحليل فهم الطلاب لمفهوم الأسس: منظور نظرية بيري–كيرين" إلى تقييم فهم الطلاب لمفهوم الأسس بناءً على نظرية بيري وكيرين، وقد تكون مجتمع الدراسة من طلاب من الصف الحادي عشر ذي القدرات المتوسطة بمدرسة في إندونيسيا، واشتملت عينة الدراسة على عدد من الطلاب، واستخدمت الدراسة المنهج الوصفي، واستعانت الدراسة بالمقابلات، وقد توصلت إلى أن وجود تأثير إيجابي لاستخدم نظرية بيري وكيرين على تعزيز فهم الطلاب للموضوعات المتعلقة بالأشكال.

هدفت دراسة (Blanton et al., 2015) بعنوان: "تطوير التفكير الجبري لدى الأطفال: تأثير التدخل الشامل للجبر المبكر في الصف الثالث" إلى التعرف على مدى فاعلية تطبيق نهج شامل لتعليم التفكير الجبري المبكر، وقد تكون مجتمع الدراسة من طلاب الصف الثالث بشمال شرق الولايات المتحدة، واشتملت عينة الدراسة على (١٠٦) طالبًا، واستخدمت الدراسة المنهج الوصفي التحليلي، واستعانت الدراسة بالاستبانة، وقد توصلت الدراسة أن وجود أهمية لتطبيق نهج شامل لتعليم الجبر المبكر، حيث أظهر الطلاب في المرحلة الابتدائية قدرة على الانخراط في التفكير الجبري المتقدم، بدءًا من الحساب العام إلى التفكير الوظيفي.

التعقيب على الدراسات السابقة:

بالنظر إلى الدراسات السابقة نجد أن العديد من الدراسات السابقة تشابهت مع الدراسة الحالية في تناولها فاعلية استخدام نموذج بيري وكيرين للفهم الرياضي في تنمية التفكير الجبري، مثل: دراسة حجازي (٢٠٢٠)، ودراسة عبد الملاك (٢٠١٩)، ودراسة (Güner & Uygun, 2020)، واتفقت بعض الدراسات مع الدراسة الحالية في استخدامها المنهج شبه التجريبي، مثل: دراسة بني سلامة (٢٠٢٣)، ودراسة الخطيب (٢٠١٧)، واتفقت في أداة الدراسة وهي الاختبارات، مثل: دراسة (Güner & Uygun, 2020)، ودراسة " (Karimah et al., 2024)، واشتمالها على الطلاب، مثل: دراسة (Blanton et al., 2015)، ودراسة (Negara et al., 2024)، ودراسة عبد الملاك (٢٠١٩)، كما تميزت الدراسة الحالية بأنها الدراسة الوحيدة في حدود علم الباحث التي تناولت فاعلية استخدام نموذج بيري وكيرين للفهم

الرياضي في تنمية التفكير الجبري لدى طلاب الصف الأول متوسط، وقد استفاد الباحث من الدراسات السابقة في بلورة مشكلة الدراسة وإطارها النظري وتصميم أداة الدراسة ومناقشة نتائجها.

إجراءات البحث

أولًا- منهج البحث:

استخدام الباحث المنهج شبه التجريبي ذو تصميم المجموعتين (تجريبية – ضابطة)، الذي عرفه سليمان (٢٠١٤، ص. ١٢٠) على أنه" عبارة عن تجريب لا يمكن أن يتحقق فيه ضبط الإجراءات التجريبية التي يتطلب ضبطها التصميم التجريبي عادة".

ثانيًا- مجتمع وعينة البحث:

يتكون مجتمع البحث من جميع طلاب الصف الأول متوسط بمدينة الباحة بالمملكة العربية السعودية، وتم أخذ عينات البحث وَفق الآتي:

- العينة الاستطلاعية: قبل تطبيق أداة البحث (الاختبار) على العينة الرئيسة للبحث، تم إجراء اختبار تجريبي على عينة مكونة من (١٤) مفردة من مجتمع البحث (من خارج عينة البحث الأساسية) بهدف التأكد من أن اداة البحث قادرة على قياس ما تم تصميمها لقياسه بشكل دقيق وموثوق، وقد شملت هذه العملية حساب معامل السهولة والصعوبة، ومعامل ارتباط سبيرمان.
- العينة الأساسية: وهي العينة التي تم تطبيق عليها أداة البحث (الاختبار) بعد التحقق من صدقها وثباتها لتحقيق أهداف البحث والإجابة على أسئلتها، وقد تم أخذ العينة بالطريقة العشوائية البسيطة التي اشتملت على (٤٣) طالبًا من مجتمع البحث، وتم توزيعهم على (٢٢) طالبًا على المجموعة الضابطة، و(٢١) طالبًا على المجموعة التجريبية.

ثالثاً- التصميم التجريبي للبحث:

- **متغيرات البحث:** تكون البحث من عدد من المتغيرات التي تتمثل فيما يأتي:

١- المتغير المستقل: التعلم باستخدام نموذج بيري وكيرين.

٢- المتغير التابع: مهارات التفكير الجبري.

حيث تم توزيع أفراد العينة إلى مجموعتين، هما:

١- المجموعة التجريبية: درست مادة الرياضيات للصف الأول المتوسط الفصل الدراسي الأول باستخدام نموذج بيري وكيرين للفهم الرياضي.

٢- المجموعة الضابطة: تم تدريسهم مادة الرياضيات للصف الأول المتوسط الفصل الدراسي الأول بالطريقة الاعتيادية.

ضبط المتغيرات الخارجية:

- اشتملت عينة البحث على مجموعة من طلاب الصف الأول متوسط بمدينة الباحة بالمملكة العربية السعودية.
- جميع أفراد عينة البحث من الطلاب.
- تكافؤ عينة البحث: حيث قام الباحث بالتحقق من مدى تكافؤ مجموعتي الدراسة في التطبيق القبلي للاختبار، فقد تم استخدام اختبار (Paired-Samples T-Test) لمعرفة دلالة الفروق بين متوسطي درجات المجموعتين الضابطة والتجريبية في القياس القبلي وفق الآتي:

جدول (1)

اختبار (Paired-Samples T-Test)، وقيم (ت)، لمعرفة دلالة الفروق بين متوسطيّ درجات المجموعتين الضابطة والتجريبية في القياس القبلي

مهارات التفكير الجبري	القياس	العدد	المتوسط	الانحراف المعياري	قيمة (ت) المحسوبة	درجات الحرية	مستوى الدلالة	الدلالة
مهارة استخدام الرموز والعلاقات الجبرية	قبلي	22	.1455	.16541	.055	41	.956	غير دال
	بعدي	21	.1429	.14343				
مهارة التمثيل المتعدد	قبلي	22	.0909	.11916	.134	41	.894	غير دال
	بعدي	21	.0857	.13522				
مهارة حل المعادلات الجبرية	قبلي	22	.1273	.16954	.277	41	.783	غير دال
	بعدي	21	.1143	.13522				
مهارة حل المشكلات الجبرية	قبلي	22	.0818	.10065	.369	41	.714	غير دال
	بعدي	21	.0952	.13593				
الدرجة الكلية للاختبار	قبلي	22	.1114	.10794	.064	41	.950	غير دال
	بعدي	21	.1095	.07845				

يتبين من الجدول السابق: عدم وجود فروق ذات دلالة إحصائية عند مستوي الدلالة (0.05) بين متوسطي درجات المجموعتين الضابطة والتجريبية في القياس القبلي في كل من (مهارة استخدام الرموز والعلاقات الجبرية، مهارة التمثيل المتعدد، مهارة حل المعادلات الجبرية، مهارة حل المشكلات الجبرية، الدرجة الكلية للاختبار).

رابعًا- أدوات البحث:

١) دليل معلم لتدريس مادة الرياضيات للصف الأول المتوسط الفصل الدراسي الأول باستخدام نموذجبيري وكيرين في تطوير مهارات التفكير الجبري

ركز الدليل على تقديم عدد من الأنشطة التي تعتمد على نموذج بيري وكيرين في تطوير مهارات التفكير الجبري من أجل مساعدة الطلاب على خفض قلق الاختبار بحيث يتم تقديم عدد من العبارات الجبرية والمعادلات بشكل مبسط من خلال الأنشطة، لما لذلك الأمر من دور حيوي في خفض قلق الاختبار، وزيادة الفهم الرياضي لدي التلاميذ، وجاء وفق الآتي:

جدول (2)

نموذج دليل المعلم لتدريس مادة الرياضيات من حيث (زمن تدريس الموضوعات، وعدد الحصص)

م	الدرس	عدد الحصص	زمن تدريس الموضوع
١	كتابة العبارات الجبرية والمعادلات والنماذج	٢	٩٠ دقيقة
٢	معادلات الجمع والطرح	٢	٩٠ دقيقة
٣	معادلات الضرب	٢	٩٠ دقيقة
٤	المعادلات ذات الخطوتين	٢	٩٠ دقيقة

- **الإرشادات التي ينبغي على المعلم مراعاتها عند استخدام هذا الدليل:**

وقد قام الباحث بتقديم مجموعة من الإرشادات الأساسية التي تم الاعتماد عليها في تطبيق الدليل الحالي التي يمكن استعراضها على النحو الآتي:

١. الإعداد الجيد والاطلاع على النماذج السابقة التي يمكن للمعلم استخدامها.
٢. التأكد من توفر المواد اللازمة (الانترنت والبرمجيات...) التي تساعد على خلق بيئة تعليمية جذابة للطلاب.
٣. أن يتعرف المعلم على اتجاهات طلابه وأفكارهم ومعتقداتهم تجاه مادة الرياضيات.
٤. تقسيم الطلاب إلى مجموعات لتنظيم العمل داخل الفصل.
٥. التجول بين المجموعات أثناء النشاط للإشراف والمتابعة وتقديم المساعدة.
٦. يجب مشاركة جميع أفراد المجموعة في الأنشطة وتطبيق المناقشة.
٧. الاهتمام بالنقاط الرئيسية خاصة في المناقشة للاستفادة من الوقت.
٨. مراعاة مستوى الطلاب وإعطائهم الفرصة لتبادل الآراء العلمية.
٩. الأخذ بيد الطلاب نحو توليد معنى لما يدرسونه من محتوى علمي.
١٠. التأكد على الطلاب بأهمية العمل التعاوني والمشاركة الفعالة بين الجماعات داخل حجرة الفصل الدراسي.

٢) اختبار تحصيلي في وحدة (المعادلات الخطية والدوال) من مقرر الرياضيات للصف الأول المتوسط "الفصل الدراسي الأول".

- **الهدف من الاختبار:**

يهدف الاختبار التحصيلي إلى قياس فاعلية استخدام نموذج بيري وكيرين للفهم الرياضي في تنمية التفكير الجبري لدى طلاب الصف الأول متوسط، وذلك بتطبيقه قبليًا وبعديًا.

- **إعداد الاختبار:**

قام الباحث بإعداد اختبار تحصيلي من مقرر الرياضيات للصف الأول المتوسط "الفصل الدراسي الأول" بالمملكة العربية السعودية، حيث تكون الاختبار من (٢٠) سؤالًا، وهناك عدد من تعليمات التي تم وضعها لجعل الاختبار التحصيلي يكون بصورة واضحة تمكن المتعلم من الإجابة عن الاختبار بصورة سهلة دون الرجوع لمساعدة خارجية.

صدق الاختبار وثباته:

١) صدق المحكمين:

بعد الانتهاء من إعداد الاختبار وبناء أسئلته، تم عرض الاختبار في صورته الأولية (٢٦) سؤالًا على مجموعة من المحكمين في مجال المناهج وطرق تدريس الرياضيات؛ وذلك للتحقق من أن أسئلة الاختبار تقيس مهارات: مهارة استخدام الرموز والعلاقات الجبرية، مهارة التمثيل المتعدد، مهارة حل المعادلات الجبرية، مهارة حل المشكلات الجبرية، ومناسبة تلك المفردات لمستوى طلاب الصف الأول متوسط.

وبعد استعادة النسخ المحكمة من المحكمين وفي ضوء اقتراحات بعض المحكمين أعاد الباحث صياغة الاختبار؛ حيث تم حذف وإعادة صياغة بعض الأسئلة وذلك فيما أتفق عليه أكثر من (٩٢٪) من المحكمين، وبذلك أصبح الاختبار في شكله النهائي بعد التأكد من

صدقه الظاهري مكونة من (٢٠) سؤالًا.

٢) معامل السهولة والصعوبة:

قام الباحث بحساب السهولة والصعوبة لاستجابات أفراد العينة الاستطلاعية بهدف حذف الأسئلة التي تقل درجة صعوبتها عن (٠.٢٠) أو تزيد عن (٠.٨٠)، وتبين ان أسئلة الاختبار تتراوح بين (٠.٣٦ – ٠.٥٨)، وهذا يدل على ملائمة أسئلة الاختبار للطلاب.

٣) معامل التمييز لمفردات الاختبار:

قام الباحث بحساب معامل التمييز استجابات أفراد العينة الاستطلاعية بهدف التعرف على الأسئلة الضعيفة غير المميزة، بهدف حذفها أو تعديلها، والأسئلة الضعيفة هي التي يكون معامل تمييزها أقل من (٠.٢٠)، وتبين ان معاملات التمييز محصورة بين (٠.٤٣ – ١.٠) وهذا يدل على ملائمة أسئلة الاختبار للطلاب.

٤) صدق الاتساق الداخلي لمهارات الاختبار

تم حساب صدق الاتساق الداخلي بالتطبيق على العينة الاستطلاعية المكونة من (١٤) طالبًا، وذلك بحساب معامل ارتباط بيرسون بين درجات كل مهارة والدرجة الكلية للاختبار، كما يوضح نتائجها الجدول الآتي:

جدول (3)

معاملات ارتباط بيرسون بين درجات كل مهارة والدرجة الكلية للاختبار

التفكير الجبري	مهارة استخدام الرموز والعلاقات الجبرية	مهارة التمثيل المتعدد	مهارة حل المعادلات الجبرية	مهارة حل المشكلات الجبرية
معامل الارتباط بالدرجة الكلية	.936**	.925**	.917**	.904**

يتبين من الجدول السابق أن معاملات ارتباط درجات كل مهارة والدرجة الكلية للاختبار، جاءت جميعها دالة إحصائيًا عند مستوى دلالة (0.01)، وجاءت جميع قيم معاملات الارتباط قيم دالة حيث تراوحت بين (**904.-**936.)، مما يدل على توافر درجة عالية من صدق الاتساق الداخلي لمهارات الاختبار.

٥) ثبات الاختبار (كودر ريتشاردسون ٢٠ – Kuder– Richardson (KR20):

تم حساب ثبات أسئلة الاختبار عن طريق تطبيق معادلة كودر ريتشاردسون ٢٠ على عينة استطلاعية مكونة من (١٤) طالبًا من خارج العينة الاساسية، ويوضح نتائجها الجدول الآتي:

جدول (4)

معامل ارتباط معادلة كودر ريتشاردسون ٢٠ بين درجات طلاب العينة الاستطلاعية

التفكير الجبري	مهارة استخدام الرموز والعلاقات الجبرية	مهارة التمثيل المتعدد	مهارة حل المعادلات الجبرية	مهارة حل المشكلات الجبرية	الدرجة الكلية للاختبار
معامل الثبات	.710	.708	.713	.709	.953

يتبين من الجدول السابق أن قيم معاملات الثبات لمهارات الاختبار عن طريق تطبيق معادلة كودر ريتشاردسون ٢٠، جاءت بقيم عالية حيث تراوحت بين (.708–.713)، وبلغت قيمة معامل الثبات الكلي (.953)؛ وتشير هذه القيم من معاملات الثبات إلى صلاحية الاختبار للتطبيق وإمكانية الاعتماد على نتائجه والوثوق بها.

٦) ثبات الاختبار (التجزئة النصفية):

تم حساب ثبات أسئلة الاختبار عن طريق تطبيق الاختبار على عينة استطلاعية مكونة من (١٤) طالبًا وطالبة من خارج العينة الاساسية، ويوضح نتائجها الجدول الآتي:

جدول (5)

معامل ارتباط سبيرمان بين درجات طلاب العينة الاستطلاعية في المفردات الفردية ودرجاتهم في المفردات الزوجية للاختبار التحصيلي

معامل ارتباط سبيرمان	مستوى الدلالة
.964	.000

يتبين من الجدول السابق أن قيم الثبات بالتجزئة النصفية للاختبار جاءت بقيم عالية؛ حيث بلغ قيمة معامل ارتباط سبيرمان لأسئلة الاختبار (.964)، وتشير هذه القيمة إلى صلاحية الاختبار للتطبيق، وإمكانية الاعتماد على نتائجه، والوثوق بها.

٧) الصورة النهائية للاختبار: بلغ عدد أسئلة الاختبار في الصورة النهائية من (٢٠) مفردة موزعة على أبعاد الاختبار الأربعة للتفكير الجبري (مهارة استخدام الرموز والعلاقات الجبرية، مهارة التمثيل المتعدد، مهارة حل المعادلات الجبرية، مهارة حل المشكلات الجبرية)، والتصحيح يتم بطريقة تحليلية، والدرجة النهائية لهذا الاختبار هي (٤٠) درجة والجدول الآتي يوضح توزيع مفردات الاختبار، ودرجة كل بعد من أبعاده الأربعة وفق الآتي:

جدول (6)

توزيع مفردات الاختبار لكل مهارة من مهارات التفكير الجبري

أبعاد التفكير الجبري	عدد الأسئلة	الدرجة
مهارة استخدام الرموز والعلاقات الجبرية	٥	١٠
مهارة التمثيل المتعدد	٥	١٠
مهارة حل المعادلات الجبرية	٥	١٠
مهارة حل المشكلات الجبرية	٥	١٠
المجموع	٢٠	٤٠

٨) تحديد زمن الاختبار:

١. قام الباحث من خلال التجربة الاستطلاعية بحساب الزمن المناسب للاختبار عن طريق حساب المتوسط بين زمن إجابة أول خمسة طلاب، وزمن إجابة أخر خمسة طلاب، وكان متوسط الزمن المناسب للاختبار هو (٣٠) دقيقة.

٢. أما معيار التصحيح للاختبار فقد حددت درجتين لكل سؤال، ومن ثَمَّ يصبح مجموع درجات الأسئلة (٤٠) درجة.

خامسًا- الأساليب الإحصائية:

استخدم الباحث برنامج الحزمة الإحصائية للعلوم الاجتماعية (SPSS) في استخراج النتائج وفقًا للأساليب الإحصائية الآتية: معامل ارتباط سبيرمان، معامل كرونباخ ألفا، المتوسطات الحسابية والانحرافات المعيارية، اختبار (Paired-Samples T-Test)، واختبار (Independent-Samples T-Test).

عرض ومناقشة وتفسير نتائج البحث: -

أولًا: عرض ومناقشة وتفسير النتائج المتعلقة بالفرضية الأولى التي تنص على: "توجد فروق ذات دلالة إحصائية عند مستوى دلالة ($\alpha \leq 0.05$) بين متوسطي درجات طلاب المجموعتين التجريبية والضابطة في التطبيق البعدي لاختبار التفكير الجبري".

وللتحقق من صحة هذه الفرضية، فقد تم تطبيق اختبار (Independent-Samples T-Test) لمعرفة دلالة الفروق بين متوسطي درجات المجموعتين الضابطة والتجريبية في القياس البعدي، وفق الآتي:

جدول (7)

اختبار (Independent -Samples T-Test)، وقيم (ت)، لمعرفة دلالة الفروق بين متوسطيّ درجات المجموعتين الضابطة والتجريبية في القياس البعدي

مهارات التفكير الجبري	المجموعة	العدد	المتوسط	الانحراف المعياري	قيمة (ت) المحسوبة	درجات الحرية	مستوى الدلالة	الدلالة
مهارة استخدام الرموز والعلاقات الجبرية	الضابطة	22	.3091	.20215	4.432	41	.000	دال
	التجريبية	21	.6381	.28014				
مهارة التمثيل المتعدد	الضابطة	22	.2636	.16775	5.566	41	.000	دال
	التجريبية	21	.6286	.25523				
مهارة حل المعادلات الجبرية	الضابطة	22	.3000	.19272	6.448	41	.008	دال
	التجريبية	21	.6571	.16903				
مهارة حل المشكلات الجبرية	الضابطة	22	.2727	.16954	9.020	41	.000	دال
	التجريبية	21	.7714	.19272				
الدرجة الكلية للاختبار	الضابطة	22	.2864	.11039	11.750	41	.000	دال
	التجريبية	21	.6738	.10562				

يتبين من الجدول (٧) وجود فروق ذات دلالة إحصائية عند مستوى الدلالة (0.05) بين متوسطيّ درجات المجموعتين الضابطة والتجريبية في القياس البعدي في كل من (مهارة استخدام الرموز والعلاقات الجبرية، ومهارة التمثيل المتعدد، ومهارة حل المعادلات الجبرية، ومهارة حل المشكلات الجبرية، والدرجة الكلية للاختبار)، وجاءت

الفروق الإحصائية لصالح (المجموعة التجريبية).

وللتحقق من حجم الأثر تم استخدام مربع إيتا (η^2) بتطبيق المعادلة على مهارات الاختبار والدرجة الكلية، نحصل على النتائج الآتية:

جدول (8)

يوضح قيم حجم الأثر للاختبار

المهارات	مهارة استخدام الرموز والعلاقات الجبرية	مهارة التمثيل المتعدد	مهارة حل المعادلات الجبرية	مهارة حل المشكلات الجبرية	الدرجة الكلية للاختبار
حجم التأثير	0.324	.430	.503	.665	.771

يتبين من الجدول السابق أن قيم إيتا (η^2) لكل من (مهارة استخدام الرموز والعلاقات الجبرية، مهارة التمثيل المتعدد، مهارة حل المعادلات الجبرية، مهارة حل المشكلات الجبرية، الدرجة الكلية للاختبار) أكبر من (0.14)، وهذا يدل على أن حجم تأثير التدريس باستخدام نموذج بيري وكيرين جاء بدرجة كبيرة.

ويمكن تفسير ذلك بأن نموذج بيري وكيرين يقدم إطارًا متكاملًا لتطوير الفهم الرياضي، وهو ما يجعله أداة فعّالة في تنمية التفكير الجبري لدى طلاب الصف الأول المتوسط مقارنة بالطرق التقليدية، ويرجع ذلك إلى أن النموذج يؤكد على أهمية ربط المفاهيم الجديدة بالمعرفة الموجودة لدى الطالب، مما يعزز الفهم والاستيعاب، كما يشجع الطلاب على طرح الأسئلة، وتقييم المعلومات، وبناء الحجج، مما يساهم في تطوير مهارات التفكير النقدي، وكذلك يوفر النموذج بيئة تعليمية تشجع الطلاب على حل المشكلات بطرق مختلفة، مما يعزز قدرتهم على التعامل مع مواقف رياضية جديدة، كما يقدم النموذج للطلاب فرصًا لاستخدام تمثيلات مختلفة للمفاهيم الرياضية (كلمات، رموز، صور)، مما يساعدهم على فهم المعنى وراء الرموز الرياضية، ويشجع الطلاب على التحول بين مختلف أنواع التمثيل، مما يعمق فهمهم للمفاهيم ويساعدهم على اختيار التمثيل الأنسب لحل المشكلات، وهذا ما يتفق جزئيًّا مع دراسة بني سلامة (٢٠٢٣)، التي توصلت إلى وجود فروق دالة إحصائيًّا بين متوسطات أداء طلاب المجموعة التجريبية والمجموعة الضابطة على اختبار التبرير الرياضي تعزى لنموذج بيري وكيرين لصالح المجموعة التجريبية، وتتفق –أيضًا– مع دراسة المعولية (٢٠٢٣) التي اشارت إلى وجود فروق دالة إحصائيًّا بين متوسطي درجات طالبات المجموعة التجريبية والمجموعة الضابطة في كل من اختبار التفكير الجبري، ومقياس الاتجاه نحو الرياضيات تعزى إلى طريقة التدريس وفقًا للنموذج القائم على حل المشكلات في التفكير الجبري لصالح المجموعة التجريبية، كما اتفقت نتائج الدراسة الحالية جزئيًّا مع دارسة (Syafiqoh et al., 2018) التي توصلت إلى وجود تأثير إيجابي لاستخدم نظرية بيري وكيرين على تعزيز فهم الطلاب للموضوعات المتعلقة بالأشكال.

ثانيًا– عرض ومناقشة وتفسير النتائج المتعلقة بالفرضية الثانية التي تنص على: "توجد فروق ذات دلالة إحصائية عند مستوى دلالة ($\alpha \leq 0.05$) بين متوسطي درجات طلاب المجموعة التجريبية في التطبيقين القبلي والبعدي لاختبار التفكير الجبري".

وللتحقق من صحة هذه الفرضية، فقد تم تطبيق اختبار (Paired–Samples T–Test) لمعرفة دلالة الفروق بين متوسطي درجات المجموعة التجريبية في

التطبيقين القبلي والبعدي لاختبار التفكير الجبري، وذلك على النحو الآتي:

جدول (9)

اختبار (Paired-Samples T-Test)، وقيم (ت)، لمعرفة دلالة الفروق بين متوسطيّ درجات المجموعة التجريبية في التطبيقين القبلي والبعدي لاختبار التفكير الجبري

مهارات التفكير الجبري	القياس	العدد	المتوسط	الانحراف المعياري	قيمة (ت) المحسوبة	درجات الحرية	مستوى الدلالة	الدلالة
مهارة استخدام الرموز والعلاقات الجبرية	قبلي	21	.1429	.14343	8.549	20	.000	دال
	بعدي	21	.6381	.28014				
مهارة التمثيل المتعدد	قبلي	21	.0857	.13522	10.108	20	.000	دال
	بعدي	21	.6286	.25523				
مهارة حل المعادلات الجبرية	قبلي	21	.1143	.13522	13.008	20	.000	دال
	بعدي	21	.6571	.16903				
مهارة حل المشكلات الجبرية	قبلي	21	.0952	.13593	15.916	20	.000	دال
	بعدي	21	.7714	.19272				
الدرجة الكلية للاختبار	قبلي	21	.1095	.07845	18.867	20	.000	دال
	بعدي	21	.6738	.10562				

يتبين من الجدول السابق: وجود فروق ذات دلالة إحصائية عند مستوي الدلالة (0.05) بين متوسطي درجات المجموعة التجريبية في التطبيقين القبلي والبعدي لاختبار التفكير الجبري في كل من (مهارة استخدام الرموز والعلاقات الجبرية، مهارة التمثيل المتعدد، مهارة حل المعادلات الجبرية، مهارة حل المشكلات الجبرية، الدرجة الكلية للاختبار)، وجاءت الفروق الإحصائية لصالح (القياس البعدي).

ويمكن تفسير ذلك إلى أن النموذج يوفر فرصًا للطلاب للعمل بشكل تعاوني ومناقشة أفكارهم مع الآخرين، مما يساهم في تطوير فهمهم للمفاهيم الرياضية، كما يشجع النموذج الطلاب على المشاركة الفعالة في عملية التعلم، بدلًا من مجرد الاستماع إلى الشرح، وكذلك يوفر النموذج للطلاب فرصًا لاكتشاف المعرفة بأنفسهم من خلال التجريب والاستكشاف، ويوفر النموذج فرصًا لتقديم تغذية راجعة مستمرة للطلاب، مما يساعدهم على تحديد نقاط قوتهم وضعفهم وتحسين أدائهم.

حيث اتفقت نتائج الدراسة الحالية مع دراسة حجازي (٢٠٢٠) التي توصلت إلى وجود فروق دالة إحصائيًّا بين متوسطي درجات تلاميذ المجموعة التجريبية وتلاميذ المجموعة الضابطة في التطبيق البعدي لاختبار التفكير الجبري لصالح المجموعة التجريبية الذين درسوا باستخدام نموذج بيري وكيري للفهم الرياضي.

وبعد اختبار الفرضيات نكون قد توصلنا إلى الإجابة عن سؤال الدراسة الرئيس: ما فاعلية استخدام نموذج بيري وكيرين للفهم الرياضي في تنمية مهارات التفكير الجبري لدى طلاب الصف الأول متوسط؟

ملخص النتائج:

أولًا: ملخص نتائج الفرضية الأولى التي تنص على: "توجد فروق ذات دلالة إحصائية عند مستوى دلالة ($\alpha \leq 0.05$) بين متوسطي درجات طلاب المجموعتين التجريبية والضابطة في التطبيق البعدي لاختبار التفكير الجبري".

- تبيّن وجود فروق ذات دلالة إحصائية عند مستوي الدلالة (0.05) بين متوسطي درجات المجموعتين الضابطة والتجريبية في القياس البعدي في كل من (مهارة استخدام الرموز والعلاقات الجبرية، مهارة التمثيل المتعدد، مهارة حل المعادلات الجبرية، مهارة حل المشكلات الجبرية، الدرجة الكلية للاختبار)، وجاءت الفروق الإحصائية لصالح (المجموعة التجريبية).

ثانيًا– ملخص نتائج الفرضية الثانية والتي تنص على: "توجد فروق ذات دلالة إحصائية عند مستوى دلالة ($\alpha \leq 0.05$) بين متوسطي درجات طلاب المجموعة التجريبية في التطبيقين القبلي والبعدي لاختبار التفكير الجبري".

- تبيّن وجود فروق ذات دلالة إحصائية عند مستوي الدلالة (0.05) بين متوسطي درجات المجموعة التجريبية في التطبيقين القبلي والبعدي لاختبار التفكير الجبري في كل من (مهارة استخدام الرموز والعلاقات الجبرية، مهارة التمثيل المتعدد، مهارة حل المعادلات الجبرية، مهارة حل المشكلات الجبرية، الدرجة الكلية للاختبار)، وجاءت الفروق الإحصائية لصالح (القياس البعدي).

توصيات الدراسة:

- تشجيع معلمي الرياضيات على استخدام نموذج بيري وكيرين للفهم الرياضي في تنمية التفكير الجبري لدى طلابهم.
- ضرورة تدعيم مقررات الرياضيات بأنشطة مختلفة ونوعية وفق نموذج بيري وكيرين للفهم الرياضي وصياغتها بصورة تساعد على تنمية مهارات التفكير الجبري لدى الطلاب.
- تقديم الدعم المهني اللازم لمعلمي الرياضات لمساعدتهم على استهداف تنمية مهارات التفكير الجبري لدى طلابهم باستخدام نموذج بيري وكيرين للفهم الرياضي من خلال القراءات الموجهة، وارشادهم للمصادر المتخصصة، وتصميم برامج تدريبية خاصة بهذا الموضوع.

مقترحات الدراسة: عمل دراسات مستقبلية عن:

- إجراء دراسة تحليلية لمناهج الرياضيات بالمرحلة المتوسطة في ضوء نموذج بيري وكيرين للفهم الرياضي.
- دراسة فاعلية برنامج تدريبي مقترح قائم على نموذج بيري وكيرين للفهم الرياضي في تنمية الممارسات التدريسية لدى معلمي الرياضيات بالمراحل التعليمية المختلف

المراجع

أولاً: المراجع العربية

أبو عره، رجاء لطفي أحمد. (٢٠١٤). *مراحل نمو الفهم الهندسي في موضوع المثلثات باستخدام الجيوجيبرا لدى طلاب الصف الثامن الأساسي: دراسة نوعية* [رسالة ماجستير غير منشورة]. جامعة النجاح الوطنية.

أبو عصر، رضا مسعد السعيد. (٢٠٢١). التفكير الجبري: مهارته وتنميته بمراحل التعليم العام.

مجلة تربويات الرياضيات، ٢٤ (٧)، ٩- ٤٩.

الأحمدي، سعاد بنت مساعد. (٢٠١٩). مستوى التفكير الجبري والأخطاء الجبرية الشائعة المُصاحبة لدى طالبات الصف الثامن والتاسع والعاشر في مدينة الرياض. *مجلة جامعة الفيوم للعلوم التربوية والنفسية*، ١ (١٢)، ١٩١-٢٣٨.

إسحاق، حسن بن عبد الله. (٢٠١٨). فاعلية استخدام برنامج الجيوجبرا (GeoGebra) في تنمية مهارات التفكير البصري والتحصيل في الرياضيات لدى طلاب الصف الأول المتوسط. *دراسات تربوية ونفسية-مجلة كلية التربية بالزقازيق*، ٢ (٩٩)، ٢٦٧-٣١٥.

بني سلامة، أحمد جمال حسن؛ الشناق، مأمون محمد. (٢٠٢٤). أثر استخدام نموذج بيري وكيرين للفهم الرياضي في تحسين التبرير الرياضي لدى طلبة الصف السابع الأساسي في الأردن. *جرش للبحوث والدراسات*، ٢٤ (٥)، ٣٠١-٣٣١.

بهوت، عبد الجواد؛ زيدان، أحمد منصور مصطفى؛ عشوش، إبراهيم محمد رشوان. (٢٠٢١). تنمية مهارات التفكير الجبري لدى طلاب المرحلة الثانوية في ضوء المنحى البنائي. *مجلة كلية التربية بجامعة كفر الشيخ*، (١٠٢)، ٩١-١٠٨.

الجواهري، محمد عباس حيدر؛ الركابي، فرح شاكر محمود. (٢٠٢٣). تحليل كتاب الرياضيات للصف السادس الابتدائي وفقاً لمستويات الفهم الرياضي. *مجلة دراسات تربوية*، ١ (٢)، ١-٢٧.

حجازي، مسعد محمد إبراهيم. (٢٠٢٠). فاعلية استخدام نموذج بيري وكيرين Pirie and Kieren للفهم الرياضي في تنمية التفكير الجبري لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية. *مجلة كلية التربية بجامعة المنصورة*، (١١٠)، ٥٥٩-٥٨٧.

الحربي، عبد الله ثويني؛ الضلعان، بدر بن محمد بن عبدالله. (٢٠٢٣). العلاقة بين التفكير الجبري والتفكير الهندسي لدى طلاب الصف الثاني المتوسط. *مجلة المناهج وطرق التدريس*، ٢ (٢)، ١٢-٣٤.

الخطيب، محمد أحمد. (٢٠١٧). أثر استخدام نموذج بيري وكيرين (Pirie and Kieren) للفهم الرياضي في الاستدلال المنطقي وخفض العبء المعرفي لدى طلاب الصف السابع الأساسي في الأردن. *مجلة جامعة طيبة للعلوم التربوية*، ١٢ (٢)، ٣١٣-٣٢٨.

الزهيري، شيماء حسين محمد. (٢٠٢٣). المهارات الخوارزمية وعلاقتها بالتفكير الجبري لدى طالبات الصف الثاني متوسط في مادة الرياضيات. *المجلة العراقية للبحوث الإنسانية والاجتماعية والعلمية*، ٣ (١٠)، ١٢١٩-١٢٣٠.

سليمان، عبد الرحمن سيد. (٢٠١٤). *مناهج البحث*. دار عالم الكتب.

الشهري، مانع علي محمد. (٢٠٢٠). فاعلية استراتيجية الاستقصاء في التحصيل وتنمية مهارات التفكير الجبري لدى طلاب الصف الأول المتوسط. *مجلة كلية التربية الأساسية للعلوم التربوية والإنسانية*، ١ (٤٦)، ٢٧٢- ٢٩٥.

عبد الملاك، مريم موسى متى. (٢٠١٩). تحليل دور الحديث الرياضي في نمو الفهم الرياضي لموضوع الكسور لدى تلاميذ الصف الرابع الابتدائي باستخدام نموذج بيري وكيرين. *المجلة*

العلمية لكلية التربية، ٣٥ (٩)، ٥٣٤-٥٧٧.

العتيبي، هيفاء سعد؛ عراقي، السعيد محمود. (٢٠١٩). فاعلية استخدام استراتيجية الصف المقلوب في تنمية مهارات التفكير الجبري لدى طالبات المرحلة الثانوية. *مجلة العلوم التربوية والنفسية*، ٣ (١٩)، ٨٠- ٩٧.

عثمان، شذا محمد؛ البركات، على أحمد؛ خصاوية، أمل عبد الله. (٢٠٢٠). *التفكير الجبري المبكر لدى معلمي المرحلة المتوسطة الأساسية وتلاميذهم* [رسالة ماجستير غير منشورة]. جامعة اليرموك.

العنزي، مبارك خضير. (٢٠٢٠). *أثر أنشطة قائمة على الطلاقة الإجرائية في التفكير الجبري والقدرة على حل المسألة لدى طلبة المرحلة المتوسطة في المملكة العربية السعودية* [رسالة دكتوراه غير منشورة]. جامعة اليرموك.

فهيم، رحمة فوزي محمود؛ السيد؛ ماجدة مصطفى؛ إبراهيم، محمد حسين علي. (٢٠٢٢). مهارات التفكير الجبري اللازمة لتلاميذ الحلقة الثانية من التعليم الأساسي لتدريس الرياضيات. *مجلة دراسات تربوية واجتماعية بجامعة حلوان*، ٢٨ (٢)، ٩١-١٢٨.

القحطاني، عثمان بن علي؛ الصمادي، محارب علي. (٢٠١٨). أثر استخدام التعلم البنائي في تدريس الجبر على تنمية مهارات حل المشكلة الرياضية لدى طلاب الصف الأول متوسط. *مجله كلية التربية*، (٤٢)، ١١٧- ١٥٦.

محمود، مروة نور شحاته. (٢٠٢٣). فاعلية استخدام عادات العقل في تنمية مهارات التفكير الجبري لدى تلاميذ الصف الأول الإعدادي. *مجله البحث في التربية وعلم النفس*، ٣٨ (١)، ٢٧٥- ٣٠٦.

المعولية، أميرة بنت حمود بن سيف. (٢٠٢٣). *فاعلية التدريس وفق النموذج القائم على حل المشكلات في التفكير الجبري والاتجاه نحو الرياضيات لدى طالبات الصف الثامن الأساسي* [رسالة ماجستير غير منشورة]. جامعة السلطان قابوس.

ثانيًا: المراجع الأجنبية:

Awiria, E. P., Santosa, C. A. H. F., & Yuhana, Y. (2021). Lesson Design of Table and Diagram Modeling to Develop Algebraic Thinking Ability of Elementary Schools Students. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education Vol*, *12* (11), 2032-2037.

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I., & Kim, J. S. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for research in Mathematics Education*, *46* (1), 39-87.

Chimoni, M., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2023, July). The association of algebraic thinking with working memory, control of processing, and speed of processing. In *Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (No. 3). Alfréd Rényi Institute of Mathematics; ERME.

Gokalp, N. D., & Bulut, S. (2018). A new form of understanding maps: Multiple representations with Pirie and Kieren model of understanding. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education, 26* (6), 1-21.

Gülkilika, H., Ugurlu, H. H., & Yürük, N. (2015). Examining Students' Mathematical Understanding of Geometric Transformations Using the Pirie-Kieren Model. *Educational Sciences: Theory and Practice*, *15* (6), 1531-1548.

Güner, P., & Uygun, T. (2020). Examining students' mathematical understanding of patterns by Pirie-Kieren model. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *35*

Journal on Mathematics Education, *12* (3), 507-530.

Peñaloza, J. A., & Vásquez, F. M. R. (2022). Understanding ratio through the Pirie-Kieren model. *Acta Scientiae*, *24* (4), 24-56.

Putri, R. A., & Susiswo, S. (2020, April). Analysis of layer of primitive knowing of high school students in linear function material: A study of application of student activity sheets based on Pirie Kieren theory. In *AIP Conference Proceedings*, *2215*(1), 1-7.

Sibgatullin, I. R., Korzhuev, A. V., Khairullina, E. R., Sadykova, A. R., Baturina, R. V., & Chauzova, V. (2022). A Systematic Review on Algebraic Thinking in Education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 18* (1), 1-15.

Steyn, M. G. (2014). *Teaching the mathematical concept of time in Grade 2*. University of Pretoria (South Africa).

Syafiqoh, N., Amin, S. M., & Siswono, T. Y. E. (2018, November). Analysis of student's understanding of exponential concept: a perspective of Pirie-Kieren theory. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1108, No. 1, p. 012022). IOP Publishing.

Twohill A. (2018) *Observations of Structure Within Shape Patterns*. In: Kieran C. (eds) Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds. ICME-13 Monographs. Springer, Cham

(3), 644-661.

Irvine, J. (2023). The Pirie Kieren Dynamic Model of the Growth of Mathematical Understanding: The Critical Concept of Folding Back. *Journal of Instructional Pedagogies*, *29*, 1-18.

Karimah, N. I., Setiyani, S., Ferdianto, F., Sumarwati, S., & Heryanti, D. (2024). Layers of Student Understanding Based on Pirie Kieren's theory in Solving Story Problems in Terms of Cognitive Style. *IJORER: International Journal of Recent Educational Research*, *5* (2), 427-442.

Kennedy, I., & Ebuwa, S. O. (2022). Proficiency in algebraic equations as a predictor of secondary school students 'academic achievement in mathematics. *African Journal of Mathematics and Statistics Studies*, *5* (3), 33-42.

Kusumaningsih, W., & Herman, T. (2018). Improvement Algebraic Thinking Ability Using Multiple Representation Strategy on Realistic Mathematics Education. *Journal on Mathematics Education*, *9* (2), 281-290.

Lestari, W. D., Aisah, L. S., & Nurafifah, L. (2020, October). What is the relationship between self-regulated learning and students' mathematical understanding in online lectures during the covid-19 pandemic? In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1657, No. 1, p. 012065). IOP Publishing.

Negara, R. K. H., Turmudi, T., & Wahyudin, W. (2024). Mathematics Learning Assessment Based on Pirie-Kieren's Theoretical Framework in Elementary School. *KnE Social Sciences*, 241-252.

Nopa, J. R., Suryadi, D., & Hasanah, A. (2019, February). The 9th grade students' mathematical understanding in problem solving based on Pirie-Kieren theory. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1157, No. 4, p. 042122). IOP Publishing.

Patmaniar, P., Amin, S. M., & Sulaiman, R. (2021). Students' Growing Understanding In Solving Mathematics Problems Based On Gender: Elaborating Folding Back.